

ロジスティック成長するロトカ・ヴォルテラ型反応拡散方程式の資源分布依存性

早稲田大学 大学院先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻 山崎研究室
渡部悠人 (Yuto WATANABE) *

概要

フィッシャー方程式において資源分布を考慮した系では、bang-bang type と呼ばれる資源分布が生物数を最大化させることが知られている。我々は、この性質が捕食者と被捕食者の数の時間変化を表すロトカ・ヴォルテラ方程式に基づく反応拡散系においても成り立つかどうかを調べており、本発表では、bang-bang type を満たす資源分布の中でもどのような分布が生物数を最大化させるかについてのシミュレーション結果を発表する。

1 導入

1.1 反応拡散方程式

反応拡散方程式は放物型偏微分方程式の一種である。反応拡散方程式は反応項と拡散項をもち、各場所で反応と拡散が同時におこっているような時間発展する過程を記述する。化学反応や生態系の運動、神経線維の興奮など、様々な現象を表すモデル方程式として登場する。反応拡散方程式は具体的に 1 成分系では

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Delta u(\mathbf{x}, t) + f(u)$$

で記述される。ここで、 Δu は拡散項、 $f(u)$ は反応項に相当する。また、1 成分系を連立させた 2 成分系は

$$\begin{cases} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Delta u(\mathbf{x}, t) + f(u, v) \\ \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Delta v(\mathbf{x}, t) + g(u, v) \end{cases}$$

で記述される。ただし $\Delta := \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ である。反応拡散方程式の解は空間一様解、定常解、進行波解等の基本的な解や、時間周期解、爆発解、時空間パターン、連結解等の空間的に特徴の見える解が存在する。

* E-mail:watanabe3y@ruri.waseda.jp

1.2 ロジスティック方程式

ロジスティック方程式はピエール＝フランソワ・フェルフルストによって発案された生物の個体数について記述された非線形な常微分方程式であり、具体的に

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1)$$

と書き表される [1]。ここで N は生物の個体数、 r は生物の増殖率、 K は環境収容力を表す。生物が生息している環境には生物数が増加できる上限があると考え、その数を環境収容力 K とし、生物数が増加するにつれ餌の取り合いなどによって増加率が減ると考えることによってロジスティック方程式が考え出される。以下では、ロジスティック方程式と同じように、生物の増加が抑えられている系をロジスティック成長する系と呼ぶ。

また、ロジスティック方程式を反応拡散系に拡張した系をフィッシャー方程式と呼ぶ。フィッシャー方程式は

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Delta u(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t)(1 - u(\mathbf{x}, t)) \quad (2)$$

で表される。これは 1 次元において、適切な初期値に対して進行波解を持つことが知られている [2]。

1.3 ロトカ・ヴォルテラ方程式

ロトカ・ヴォルテラ方程式は、アルフレッド・ロトカとヴィット・ヴォルテラにより発案された生物の捕食、被捕食による個体数の時間発展を示した二成分系の非線形常微分方程式である。[1] 具体的な形は

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au - buv \\ \frac{dv}{dt} = -cv + duv \end{cases} \quad (3)$$

と書き表される。ここでは、 u が非捕食者の個体数を表し、 a の増加率で増え、 b の減少率で捕食され個体数が減少する。第二項が uv の積の形になっているのは、非捕食者が増えれば捕食者に見つかりやすくなり捕食される数が多くなり、捕食者が増えればその分非捕食者が捕食される数が増えるためである。 v は捕食者の個体数を表し、 c の減少率で減り、 d の増加率で捕食し個体数が増加する。ロトカ・ヴォルテラ方程式は非線形問題の解析の観点から、リエナール系であり、 $x = \ln u, y = \ln v$ とすれば、保存量

$$H = d \exp\{x\} + b \exp\{y\} - ay - cx \quad (4)$$

を用いて

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (5)$$

と書き換えられ、ハミルトン系であることがわかると同時に、解の軌道は非線形のセンターとして閉軌道が無数に存在することが分かる。

ロトカ・ヴォルテラ方程式を反応拡散系に拡張した反応拡散ロトカ・ヴォルテラ方程式は,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \Delta u(\mathbf{x},t) + au(\mathbf{x},t) - bu(\mathbf{x},t)v(\mathbf{x},t) \\ \frac{\partial v(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \Delta v(\mathbf{x},t) - cv(\mathbf{x},t) + du(\mathbf{x},t)v(\mathbf{x},t) \end{cases} \quad (6)$$

とかける。

2 先行研究

フィッシャー方程式に空間依存する資源分布関数を導入し, その生物数を最大化させるような資源分布の関数系を求めた研究として, 永原 [3] の結果がある。永原 [3] によると, 以下の系

$$\begin{cases} \frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \Delta u(\mathbf{x},t) + u(\mathbf{x},t)(m(x) - u(\mathbf{x},t)) & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) \geq 0, u(x,0) \not\equiv 0 & \text{in } \overline{\Omega} \end{cases}$$

において $m(x)$ は資源分布関数を表し, ロジスティック方程式の環境収容力を置き換えたものとしても理解ができる。ただし, Ω は有界領域, ν はその境界の法線方向の微分を表し, 二つ目の式は反射壁境界条件を示す。この系において, 資源分布関数 $m(x)$ が, 3つの条件

- (1) $\underline{m}(x) \leq m(x) \leq \overline{m}(x)$ a.e. in Ω
- (2) $\int_{\Omega} m(x)dx \leq M$
- (3) $u(x,t) \not\equiv 0$ は不安定

を満たすとき, $\int_{\Omega} u(x,t)dx$ を最大化させる $m(x)$ は bang-bang type であると導いた。ここで, bang-bang type とは

$$m(x) = \overline{m}(x)\chi_E + \underline{m}(x)\chi_{\Omega \setminus E}$$

の形でかける関数である。 χ は特性関数, $E \subset \Omega$ はある領域を示す。

また, この系について, 資源の総量と生物数の比が, 資源分布によらずに上に有界であるかを調べた研究として, X.Bai-X.He-F.Li[4] の結果がある。そこでは, $\Omega = [0, 1]$ として,

$$\frac{\int_{\Omega} u(x,t)dx}{\int_{\Omega} m_{\varepsilon}(x)dx} \rightarrow 3, \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

$$m_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1 - \varepsilon] \\ 1/\varepsilon & x \in (1 - \varepsilon, 1] \end{cases}$$

と導出されている。すなわち, 境界の端に餌を積み上げる極限で上界が導出されている。

3 モデル

先行研究を受け、反応拡散型ロトカ・ヴォルテラ方程式に資源分布をロジスチック成長の環境収容力と同じ形で導入する。すなわち、モデルは以下のようになる。

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t)(m(x) - u(x,t) - bv(x,t)) & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + v(x,t)(-c + du(x,t)) & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) \geq 0, u(x,0) \not\equiv 0 & \text{in } \bar{\Omega} \end{cases}$$

なお、今回は1次元での特性を見るためラプラシアンを空間の二階微分で表現しており、 Ω は有界領域である。

3.1 パラメーターの選定

今考えている系には、3つのパラメータ b, c, d が存在する。先行研究でもあったとおり、絶滅する解、つまり $u(x, t), v(x, t)$ が0に収束するような解を排除するようにパラメータを決定する。柳田 [5] によると、 $m(x) > c/d$ であり、定数であるとき、解は固定点をなす定数定常解に収束するので、常微分系を考える。

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = u(t)(m - u(t) - bv(t)) \\ \frac{dv(t)}{dt} = v(t)(-c + du(t)) \end{cases}$$

固定点は、 $(0, 0), (m, 0), (c/d, 1/b(m - c/d))$ である。 $(0, 0), (m, 0)$ が不安定になるようにパラメータを決定する。

3.1.1 $(0, 0)$ の場合

ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} m - 2u - bv & -bu \\ dv & -c + du \end{pmatrix}$$

となり、 $(0, 0)$ を代入すると、

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

となる。固有値が $m > 0$ において片方正、片方負となるので $m > 0$ で $(0, 0)$ は不安定となる。

3.1.2 $(m, 0)$ の場合

ヤコビ行列に $(m, 0)$ を代入すると、

$$\begin{pmatrix} -m & -bm \\ 0 & -c + dm \end{pmatrix}$$

となり、固有値は $\frac{mc-m-c\pm|c-m-md|}{2}$ となる。固有値のいずれかが正となればよいので、例えば $c = 7.1, d = 5$ とすればよい。このとき、 b はどの値をとっても良い。前提条件より $m(x) > c/d = 1.42$ と考える。こうすることにより、3つ目の固定点が正となり、系の正值性も保たれる。

以下に、実際の常微分系での相図を示す。 $m = 1$ の時は $(1,0)$ に、 $m = 5$ の時は $(1.42, 2.75)$ に収束していることが分かる。

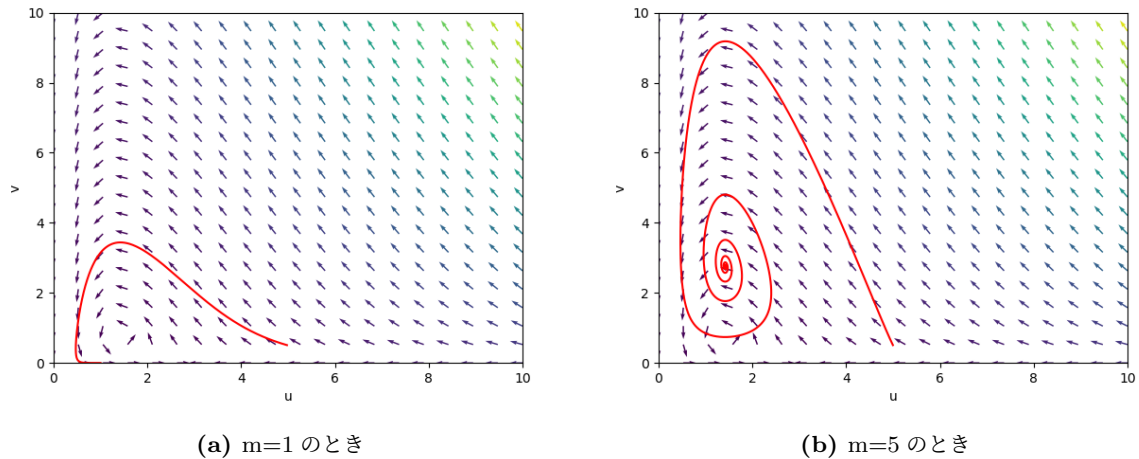


図 3.1 各 m に対する相図 $b = 1.3, c = 7.1, d = 5$ 初期値 $u = 5, v = 0.5$

4 主結果

上のモデルを差分法による数値計算を行い、bang-bang type の資源分布の中でもどのような資源分布が生物数を最大化するのかを調べた。本研究は資源を領域の境界から少し離れたところに積み上げると生物の総量 $u + v$ が最大化するのではないかと示唆した。

資源を積み上げる例

先行研究 [2] より、資源の総数が等しいとき、資源を積み上げていく極限で上界が求まっていた。このことから資源を積み上げる方が生物の総数は大きくなると考え、確かめた。結果は以下の図 4.1 の通りになり、横軸（資源の高さ）が 40 を超えたあたりで急激に $u + v$ の総量が大きくなり始めるのが分かる。

資源の山を動かす例

資源は高く積んだ方が $u + v$ を最大化するとわかったので、次に領域のどこに積み上げればよいのかをシミュレーションした。結果は以下の図 4.2 のようになり、資源の山は領域の境界でもなく、真ん中でもなく、境界から少しずらしたところが最大になることが分かった。

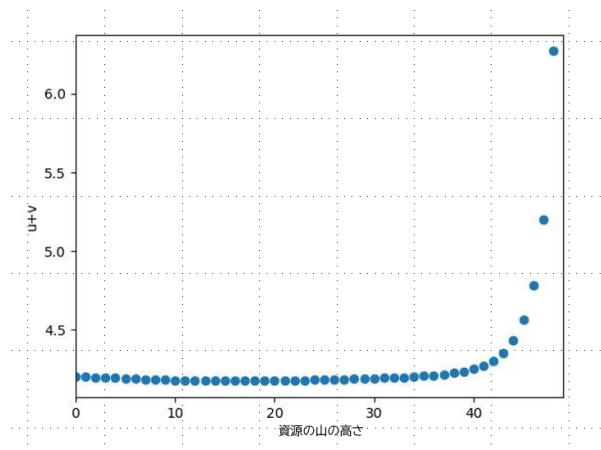


図 4.1 領域の真ん中に資源を積み上げる例の結果 縦軸は $u + v$ の総量、横軸は資源の高さである

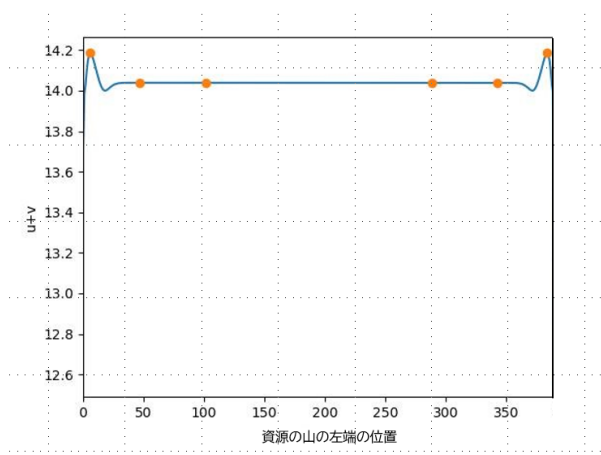


図 4.2 資源の山を移動させる例の結果 縦軸は $u + v$ の総量、横軸は資源の山の左端の位置である。オレンジの点は極大値を示している。

参考文献

- [1] Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, CRC Press, (2019)
- [2] A. Kolmogorov, I. Petrovsky and N. Piskunov, Etude de l' equation de la diffusion avec croissance la quantite de matiere et son application au probleme biologique, Bjul. Moskovskogo Gos. Univ. Ser. Internat. Sec. **A**(1), (1937)
- [3] K. Nagahara and E. Yanagida: Maximization of the total population in a reaction-diffusion model with logistic growth, Calculus of Variations and Partial Differential Equations. **57**(80), (2018)
- [4] X. Bai, X. He and F. Li: An Optimization problem and its application in population dynamics. Proceedings of the American Mathematical Society. **144**(5), 2161–2170 (2015)
- [5] 柳田 英二, 反応拡散方程式, 東京大学出版会, (2015)